

70 anos

dos

“*Conceitos Fundamentais da Matemática*” de Bento de Jesus Caraça

O livro

O livro *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça (1901-1948), concebido em três partes — Números, Funções, Continuidade — foi inicialmente editado, pelas Edições Cosmos, em dois pequenos volumes da coleção “Biblioteca Cosmos”, criada numa época dominada pela Segunda Guerra Mundial por iniciativa sobretudo de Manuel Rodrigues de Oliveira, além de Manuel Frois Figueiredo e António Duarte Costa e que viria a ser dirigida por Bento de Jesus Caraça até à sua morte prematura; o primeiro volume dos “*Conceitos*” aparece em 1941 e o segundo em 1942 (respectivamente com o n.º2 e o n.º18 na coleção), um relativo à primeira parte e o outro à segunda, com sucessivas reedições (1.º vol: de novo em 1941, 1942, 1944, 1946; 2.º vol: 1944) e depois os “*Conceitos*” surgem num só volume — incluindo as três partes — em edições da Tipografia Matemática e da Livraria Sá da Costa (1951, 1952, 1958, 1963, 1970, 1975, 1978 e 1989), e enfim em 1998 apareceu uma edição da Gradiva — por empenho do editor Guilherme Valente — na coleção “Ciência Aberta” (com o n.º98) incluindo um conjunto de textos de autores contemporâneos, sob o título geral de *Sementes que vingaram*, glosando pequenas frases ou expressões retiradas do livro de Bento de Jesus Caraça, alusivas a temas que estavam destinados a desenvolvimentos notáveis na segunda metade do século XX.



Trata-se de uma obra sobre matemática elementar “escrita com mero intuito de divulgação”, segundo as próprias palavras do autor¹, onde se privilegia o modo como as ideias foram sendo elaboradas, contrariando assim a transmissão dos assuntos como *coisa criada*; e como é mais simples fazê-lo desta última maneira!! Ou não fosse difícil divulgar sem trair!! A tal ponto que António Sérgio, em polémica célebre² com Bento de Jesus Caraça a propósito dos “*Conceitos*” o invectiva dizendo: “O vulgarizador, quase sempre, assemelha-se a um professor de equitação que para facilitar as coisas suprimisse o cavalo”. Ao que responde, explicando-se, Bento de Jesus Caraça: “Obra de vulgarização procurará sê-lo no sentido alto do termo — aquela vulgarização que *não abaixa nem deturpa*, que traz ao nível do *homem comum* o *património cultural comum*[...]”.

Trata-se por outro lado de ilustrar, através da matemática, uma concepção dialéctica da natureza e da história, a que não é estranha a exposição crua das contradições próprias ao desenvolvimento da produção do conhecimento nem a interdependência desse desenvolvimento com o fluir das transformações sociais; insistindo Bento de Jesus Caraça ao longo dessa ilustração no processo de superação daquelas contradições, processo inseparável da racionalidade, da liberdade de pensamento e da luta de classes.

Divulgar sem simplificações que abaxem e deturpem e apreender dialecticamente a produção do conhecimento matemático, tal foi a difícil tarefa que empreendeu Bento de Jesus Caraça nas páginas dos seus *Conceitos Fundamentais da Matemática*.



Do que se disse do livro

A este livro teceram-se críticas pela positiva e pela negativa essencialmente pelas duas circunstâncias já apontadas: o seu carácter divulgador e o seu carácter ideológico. Para uns trata-se de má divulgação que peca por ser pouco abrangente³, simplificadora e redutora, para outros trata-se de boa divulgação por tornar acessível e apetecível a muitos o que lhes parecia inacessível e fora da realidade interessante. Por outro lado para uns trata-se de um livro pioneiro na aplicação prática do materialismo dialéctico numa área que não é nem a história nem a economia, para outros trata-se de uma obra com uma agenda ideológica escondida sob a capa da matemática e que é precisamente a ideologia marxista.

Na raiz destas disputas críticas ao livro afloram porém dois factos: 1) há efectivamente um conflito entre o rigor e o surgimento das ideias e ao dele querer dar conta transmuta-se a outra escala — a da comunicação — inevitavelmente, esse conflito, mesmo situando-se num plano de informação mais depurada quer do rigor asséptico final do edifício acabado quer da ganga placentosa em que as ideias surgem; 2) ao pretender apreender o movimento das ideias seria inadequado prescindir da ferramenta mais adequada, ou seja da dialéctica, e pretendendo indagar qual o motor desse movimento, o recurso ao pensamento marxiano, teórica dos conflitos, parece afinal coisa natural, dando-se o caso de constituir o materialismo dialéctico o essencial do pensamento marxiano⁴.

Naturalmente que as dimensões dos pequenos volumes da “Biblioteca Cosmos” (de cerca de cento e vinte páginas) obrigavam a grande contenção e por vezes à tomada de opções discutíveis; disso deu conta José Sebastião e Silva⁵, que foi quicá o mais notável matemático português de há cem anos para cá, aclarando no seguinte transe uma opção tomada por Bento de Jesus Caraça:

É natural, naturalíssimo, que uma obra desta índole — para mais dirigida a um público não especializado — apresente vários pontos discutíveis. Por exemplo, a meu ver, o autor não tira partido suficiente dos progressos da lógica, que já no seu tempo permitiam chegar a um esclarecimento mais profundo de conceitos tais como os de quantidade, variável, relação, função. Eu julgo que a sua prevenção contra a lógica matemática, de raiz aristotélica (idêntica à de Poincaré e à dos matemáticos italianos do seu tempo) pesou negativamente na orientação que seguiu nos seus livros.

Por outro lado, não se refere, nesta obra, aos *métodos estatísticos e probabilísticos*, por intermédio dos quais se efectua hoje[texto é de 1968] quase toda a intervenção da matemática no estudo dos fenómenos físicos, químicos, biológicos, psicológicos, económicos, sociais, etc. Esses métodos — que constituem por assim dizer o núcleo da moderna *lógica indutiva*, e que permitem esclarecer o próprio conceito de *lei natural*, evitando certas obscuridades metafísicas — poderiam, penso eu, ter fornecido excelentes sugestões para uma orientação mais positivista e actualizada na 2ª parte do livro. Mas creio que, quando este foi escrito, os referidos métodos ainda eram mal conhecidos em Portugal, o que explica perfeitamente a omissão (note-se que a cibernética estava em gestação quando o livro foi publicado!)

A ausência de referências, no livro, a aspectos estatísticos e probabilísticos não se deveu certamente a uma menorização de ferramentas indispensáveis ao estudo da econometria, tão encomiada por Caraça por permitir introduzir métodos quantitativos no estudo dos “movimentos de mercadorias produzidos por acções individuais”, ou seja na economia, com o objectivo de a tornar, tanto quanto possível uma ciência exacta; num esboço manuscrito não concretizado do livro inclui-se uma secção intitulada “Conceitos de probabilidade”⁶, cuja exclusão afinal no livro terá sido uma opção difícil, pois por certo que não lhe faltaria vontade de preencher alhures essa lacuna não fossem os seus breves 47 anos de vida⁷.

Mas a carência de aspectos geométricos nos “*Conceitos*” terá sido para Caraça uma opção difícil e/ou intencional?; um interessante estudo de Natália Bebian⁸ sobre a obra matemática de Bento de Jesus Caraça aponta para o intencional, sendo útil, para melhor esclarecimento, esta longa transcrição:

Caraça tece considerações sobre o imperialismo ateniense e suas implicações no pensamento científico e filosófico da Antiguidade. Diz ele que, em concerto com as preocupações hegemónicas de Atenas, se desenvolve neste período uma nova hierarquia de valores, que a atitude filosófica muda, que o homem se torna o «centro do mundo» e o alvo central das suas preocupações. O *surgimento da razão do Estado e a subordinação geral ao imperialismo ateniense* condena à decadência as grandes concepções dos séculos VII e VI (a.c.), concluindo que: «o clima de Atenas foi mortal para o desenvolvimento da ciência clássica». Segundo Caraça, a Matemática grega é então invadida pelo *horror do movimento, horror do infinito e degradação do número*, o que constitui uma trincheira de hibernação que só viria a desaparecer vinte séculos mais tarde. Oferece-se-nos a este propósito dizer que o horror de Caraça «aos imperialismos» o precipitou numa posição dificilmente sustentável. Fruto da sua posição radical não faz justiça aos contributos de muitos matemáticos notáveis desde Eudoxo de Cnido, pai do Cálculo integral e da Astronomia científica, a Diofanto, a Pappus e Ptolomeu, mas sobretudo à grande trindade dos matemáticos alexandrinos: Apolónio de Perga, Euclides de Alexandria e Arquimedes de Siracusa. «Os Elementos» de Euclides, datando de 300 (a.c.) foram a mais importante obra grega a chegar até nós e o texto matemático mais influente de toda a História da Humanidade (ver referência breve nos *Conceitos Fundamentais da Matemática*, parágrafo 11, cap.IV, p.194[p.183 da edição de 1998]). «Os Elementos» são uma compilação de todos os conhecimentos matemáticos disponíveis à época, desde números à Geometria plana e espacial, passando pela chamada Álgebra Geométrica. Virá talvez a propósito referir a pouca atenção que Caraça lhes dedica, especulando sobre o carácter estático das definições, questão em certa medida marginal. Em comparação são múltiplas as referências aos Pitagóricos, e à sua ideia grandiosa de ordenação do Cosmos, aos Eleatas, à discussão do primado do número sobre a figura, e ao papel

de Platão na queda vertical do pensamento helénico... (E já agora: preferiria Platão a figura ao número por ela permanecer, isto é, guardar a sua identidade, por estatismo, como o autor dos *Conceitos* crê, ou teria sido a crise da incomensurabilidade, a existência de grandezas que não se sabiam exprimir com os números então conhecidos, a causa desta atitude?).

A “crise da incomensurabilidade” era insolúvel na Grécia Antiga, por estar dependente de uma construção rigorosa dos chamados números reais (a dificuldade está em considerar os números irracionais ou seja os que não podem exprimir-se como um quociente de dois inteiros, correspondendo porém a medidas de segmentos de recta, como é o caso da diagonal de um quadrado de lado 1) o que só viria a ser feito por Richard Dedekind em 1888⁹; como diz Augusto Franco de Oliveira¹⁰:

O problema de fundo subjacente aos *Conceitos* é o da *continuidade*, objecto do último capítulo. Para lá chegar é necessário percorrer um longo caminho de reconstrução racional, dos números às funções reais, pejado de dificuldades, avanços e recuos ao longo da história milenar da matemática. No centro das dificuldades está a própria noção de número, em particular a noção de *número irracional*, que só foi cabalmente esclarecida e fundamentada com rigor na segunda metade do séc.XIX.

E um pouco mais adiante:

A preferência de Caraça pela construção de Dedekind (cortes) dos números reais pode talvez explicar-se pelo facto de ser muito mais “geométrica” e intuitiva do que as de outros matemáticos e, por isso, mais adequada a uma contextualização histórica e filosófica que recua aos gregos antigos, mas também mais apropriada à comparação (isomorfismo) com a recta geométrica.

Isto torna mais difícil de entender por que razão Caraça não menciona os esforços de Eudócio a este respeito, nem nas *Lições* nem nos *Conceitos*, pois como diz o historiador T.L. Heath (*A History of Greek Mathematics I*, Oxford, 1921) a definição eudóxiana da proporcionalidade (igualdade de razões): ‘corresponde exactamente à moderna teoria dos irracionais devida a Dedekind[...]. Os tratadistas mais citados e recomendados por Caraça, com respeito aos números reais e à análise real, Jules Tannery (*Introduction à la Théorie des Fonctions d’Une Variable*, Vol.1, 2ª edição, 1904), E.W. Hobson (*The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier’s Series*, 3ª edição, 1927) também não mencionam Eudócio neste contexto. Será por isso que Caraça o não menciona? Uma explicação possível e mais plausível é uma espécie de preconceito doutrinário, nomeadamente as suas ideias sobre o “primado do número” e a dificuldade em conciliá-las com o facto de as razões entre grandezas ou magnitudes geométricas do mesmo tipo, a/b , não serem entidades com existência autónoma (só ocorrem em proporções, nunca isoladamente), menos ainda entidades numéricas.

Bento de Jesus Caraça conhecia certamente o belo livro de Fernando de Almeida Loureiro e Vasconcellos intitulado *História das Matemáticas na Antiguidade*¹¹, publicado em 1925 e para a época um dos melhores no plano mundial sobre o assunto, mas a exaltação da geometria grega, claramente alicerçada na História, conflituava com a sua ideia do “primado do número e da degradação da figura”.

António Sérgio criticou o carácter redutor do texto, em polémica¹²; já referida; reduzindo nós¹³ também, diríamos que Sérgio foi o mais notável pensador português deste século, respigando as seguintes palavras de um outro notável homem de ideias, Vasco de Magalhães-Vilhena, crítico maior de Sérgio.

António Sérgio é o mais alto representante do humanismo progressista burguês em Portugal. Mas a sua obra ultrapassa largamente os quadros de condições sociais retardatárias. António Sérgio não é só um altíssimo escritor de ideias, o maior das nossas letras. Como Herculano, no dizer de Antero, é um grande homem na aceção completa destas palavras.

Naquela polémica ou controvérsia, com réplicas e tréplicas de Sérgio e de Caraça eram pois dois grandes homens que se debatiam. Mas sendo assim o que levaria Sérgio ao ponto de considerar os *Conceitos Fundamentais da Matemática*, “um incitamento à incultura filosófica, à incompreensão da genialidade, à barbarização dos leitores”?! e o que levaria Caraça, que escrevera no texto introdutório daquela colecção: “derrotas só existem aquelas que se aceitam”, a referir-se no termo da polémica, “a esta infeliz discussão”? que é encerrada com estas palavras:

António Sérgio proclama que ‘a minha atitude ao discutir Platão é um exemplo pernicioso para a educação dos jovens’. Por causa da minha atitude intelectual, das minhas ideias, já fui várias vezes acusado de ser *pernicioso para a educação dos jovens*. Não posso esconder o meu espanto ao ver agora juntar-se a esse coro a voz de António Sérgio.

Mas neste momento, terminada esta infeliz discussão, à qual não voltarei mais, sinto-me já como desligado dela, na situação dum espectador que assiste à representação de um episódio substancial da Comédia da Vida.

Mas de que se tratava afinal? De uma discussão académica azeda entre pessoas que se estimavam? ou de um episódio substancial da Comédia da Vida? No cerne da polémica estavam os *Conceitos Fundamentais da Matemática*. E malgrado os setenta anos decorridos ela não perdeu pertinência: será possível divulgar sem trair? Oicamos Sérgio num passo crítico — contextualizando uma citação anterior — sobre a divulgação das ideias filosóficas, adivinhando nós que com veemência semelhante atingiria no concreto a divulgação das ideias científicas, cujo discorrer, aliás, sempre acompanhou:

Em filosofia (se não digo asneira) não há resumos nem vulgarizações possíveis. Ou se estuda com verdadeiros filósofos ou não se estuda. O que torna interessante os seus problemas é a sua dificuldade. Facilitar tais problemas é deixar de vê-los e deixar de vê-los é deixar por isso de ser filósofo. O vulgarizador, quase sempre, assemelha-se a um professor de equitação que para facilitar as coisas suprimisse o cavalo.

E oiçamos Caraça — contextualizando também uma citação anterior — num amplexo de generosidade, pretendendo explicar a que vinha o aparecimento da “Biblioteca Cosmos”:

Podemos resumir nestas poucas palavras os seus intuitos — dar ao *maior número* o máximo possível de *cultura geral*, tornar acessível a todos aquilo que as condições materiais de vida e as necessidades profissionais da especialização tornam sempre difícil, e por vezes mesmo impossível, adquirir — uma visão geral do mundo, mundo físico e mundo social, da sua construção, da sua vida e dos seus problemas.

Quando falamos em *tornar acessível*, entendemo-lo de duas maneiras — pelo preço dos volumes, o qual será tão baixo quanto possível, e pela forma de tratar os problemas, que será simples, concisa, em linguagem ao alcance de todos. Procurará realizar-se a síntese destas duas exigências — *simplicidade máxima na forma de exprimir, rigor máximo na forma de expor*. Obra de vulgarização procurará sê-lo no sentido alto do termo — aquela vulgarização que *não abaixa nem deturpa*, que traz ao nível do *homem comum o património cultural comum*. [...]

Mas a questão não se limita a este simples aspecto do direito à cultura; ela põe-se também, no campo da *possibilidade*. É possível pôr ao alcance de todos a cultura geral? não existem porventura, no conjunto das ideias fundamentais da estruturação intelectual, domínios não-acessíveis ou só acessíveis a iniciados? Não é verdade que, como se vê afirmar com frequência, vulgarizar é sempre abaixar?

Entendamo-nos. Em cada ramo do conhecimento há o que é do domínio do especialista e o que é do domínio geral, aquilo que só uma vida inteira de trabalho consegue apreender (quando o consegue) e aquilo pelo qual esse ramo entronca na corrente geral das ideias e da civilização. [...]

O que se pretende vulgarizar é, precisamente, o que pertence ao domínio geral e aí não há nada que não possa ser apreendido pelo comum dos homens. [...] É pensando neles, nos seus direitos e nas suas possibilidades, que nos propomos vulgarizar *sem deturpar nem abaixar*.

Mas obviamente que a disputa entre Sérgio e Caraça ia muito além das discrepâncias no que deve e pode ser a divulgação do saber; ao idealismo platónico do primeiro opunha-se a concepção e o método do materialismo dialéctico do segundo e é esta oposição irreductível que faz progressivamente passar do debate polémico ao combate erístico¹⁴. O filósofo João Maria de Freitas-Branco evoca em dado passo de um curioso estudo¹⁵ que fez sobre o seu avô Luís de Freitas Branco uma “indisfarçável animosidade” ao platonismo da parte deste grande amigo de Bento de Jesus Caraça, atribuindo tal facto a ter estado o grande compositor “sempre longe de compreender que as ideias de Platão mais não são do que as fórmulas da física matemática”; tivesse Caraça a mesma opinião e a polémica Sérgio-Caraça não teria existido. Por outro lado que ideia teria Sérgio do materialismo dialéctico que pulsava nos “Conceitos” ao qual votava uma “indisfarçável animosidade”? Na opinião de Vasco de Magalhães-Vilhena (expressa em entrevista¹⁶ em 1989 e onde refere um trabalho seu publicado seis anos antes):

As críticas de Sérgio ao materialismo histórico, à teoria do reflexo e à dialéctica materialista, tal como ele entende essas teorias, com as limitações bibliográficas que existiam no Portugal obscurantista da época, podem considerar-se justificáveis. O que eu pretendi nesse trabalho demonstrar é que essas teorias, de facto, não são o que delas Sérgio pensava. Exigem uma interpretação mais fundamentada e rigorosa e o recurso a textos essenciais que Sérgio não podia conhecer.

Manuel Dias Duarte¹⁷ empreendeu com desvelo uma descrição da presença das concepções dialécticas (mais precisamente do materialismo dialéctico) nas páginas dos “Conceitos”, mas se essa presença resulta claríssima da sua análise — passando felizmente despercebida ao lápis azul da Comissão de Censura da época — não é menos verdade que por vezes Caraça peca por excesso de zelo para melhor fazer valer as suas interpretações à luz das leis da dialéctica¹⁸: nenhum matemático divisará a “unidade dos contrários” na noção de variável (que a lógica trata de maneira muito simples: ora é “variável de quantificação”, símbolo de uma linguagem, ora é simplesmente uma função), nem reconhecerá que no processo usual de generalizar — pão nosso de cada dia em matemática — intervém *sempre* a “negação da negação” e ninguém deixará de achar forçado ver na queda livre de um corpo no ar uma transformação da “quantidade em qualidade” conduzindo a um movimento uniforme (!) por intensificação da resistência do ar ao movimento acelerado!!¹⁹ É caso para pensar que Bento de Jesus Caraça tinha mesmo uma agenda escondida: divulgar o materialismo dialéctico por entre as malhas apertadas do obscurantismo da ditadura, no que terá sido provavelmente um pioneiro.

Do que não há dúvida é que o livro, além de um sucesso editorial indiscutível, abriu muitas vocações científicas, influenciou indiscutivelmente o ensino da Matemática em Portugal e divulgou entre nós em primícia o materialismo dialéctico.

Do que nos diz o livro

Este corajoso livro de Bento de Jesus Caraça fala tanto pelo que diz como pelo que... não o dizendo lá se diz. Está impregnado de lógica e de materialismo dialéctico e nele nunca se fala nem de lógica nem de materialismo dialéctico. É uma história bem contada e como quase todas as histórias bem contadas envolve-se por vezes nas roupagens de uma mentira útil. No livro cita-se Heródoto:

[...]historiador grego que viveu no século V antes de Cristo, ao fazer a história dos Egípcios no livro II (Euterpe) das suas Histórias, refere-se deste modo às origens da Geometria:

“Disseram-me que este rei (Sesóstria) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto estava ela diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a geometria e que depois ela passou aos gregos”.

Mas Alexandre Koyré, o mais marcante historiador das ciências no século XX, afirma a propósito desses medidores (harpedonaptas):

[...]não foram os harpedonaptas egípcios, que tinham que medir os campos do vale do Nilo, quem inventou a geometria: foram os gregos, que não tinham que medir absolutamente nada. Os harpedonaptas contentaram-se com fórmulas. Analogamente não foram os babilónios, que acreditavam na astrologia e por isso necessitavam de poder calcular e prever as posições dos planetas nos céus [...]que elaboraram um sistema de movimentos planetários^{1*}. Foram, uma vez mais, os gregos, que não acreditavam naquilo; os babilónios contentaram-se em inventar métodos de cálculo — uma vez mais fórmulas — extremamente engenhosas, por certo.

Resulta daqui, parece-me, que se podemos explicar porque é que a ciência não nasceu e não se desenvolveu na Pérsia e na China — as grandes burocracias, tal como nos explicou Needham, são hostis ao pensamento científico independente^{1**} — e se em rigor podemos explicar por que pôde nascer e desenvolver-se na Grécia, não podemos explicar por que razão ocorreu assim efectivamente.

Medidores como aqueles surgiram em muitos lugares mesmo antes dos Egípcios sem dar lugar às mesmas consequências. Em carta a um amigo que num postal enviado de Roma se admirava de não ter surgido na China uma ciência de tipo ocidental respondia Einstein que o que achava incrível é que uma tal ciência tivesse podido surgir algures e enquadrava assim essa revolução conceptual: “o desenvolvimento da ciência ocidental apoiou-se em dois grandes resultados: a invenção do sistema lógico formal (na geometria euclidiana) pelos filósofos gregos e a descoberta da possibilidade de achar relações causais mediante experiências sistemáticas (no Renascimento)”²⁰. A evocação de Heródoto opera pois como uma comodidade narrativa de quem nunca pretendeu erigir-se em historiador da ciência e de quem certamente acreditava nessa narrativa; afinal a forma axiomática de exposição da matemática é outra comodidade narrativa e certamente outra mentira útil pois a nenhum matemático ocorreria que na frieza dos axiomas — contratualmente tomados por verdadeiros — se consubstancia toda a riqueza dos objectos concretos que eles supostamente determinam. Essas comodidades narrativas são apenas veículos da razão e de modo algum podem exprimir a realidade na sua totalidade; são um contrato momentaneamente proposto a ser aceite mas inevitavelmente a renovar.

O *que nos diz o livro* é que para compreender o fluir das ideias — matemáticas ou outras — no quadro de uma racionalidade que lhes seja própria há que renovar os pressupostos da teoria necessária à sua descrição: como dialéctico que era sabia Bento de Jesus Caraça que as nossas ideias se modificam, porque se modificam as coisas (pense-se no teletransporte de matéria já conseguido em laboratório a uma escala mínima, na regeneração automática do ADN deteriorado ou seja na possibilidade de prolongamento indefinido da vida, nos presumíveis planetas habitáveis, tantas quantas as gotas de água dos oceanos da Terra), e os métodos para compreender esse fluir terão de modificar-se concomitantemente. É nesse sentido que Bento de Jesus Caraça entende recorrer aos princípios do materialismo dialéctico (tudo interage com tudo; nada permanece o que é; a quantidade transforma-se em qualidade; a negação da negação vai além da afirmação; cada coisa coexiste de alguma forma com o seu oposto) para encarar as novas alterações das coisas, em substituição das preciosas ferramentas que constituíram e constituem ainda — no seu quadro próprio — os princípios da razão enunciados por Leibniz: princípio da identidade (cada coisa tem de ser claramente definida) e princípio da razão suficiente (tudo tem alguma razão de ser), todos os demais princípios da razão — como o da causalidade, o do terceiro excluído, etc. — a eles se reduzindo.

Na certeza porém que as leis da razão sendo cómodas — para nos mitigar os erros — não são esfinges alheias ao passar dos tempos e para entender o seu movimento cumulativo, dialéctico como era não deixaria de aplicar Bento de Jesus Caraça a metodologia do materialismo dialéctico ao próprio materialismo dialéctico.

^{1*} Esquece-se frequentemente que a astrologia apenas se interessa pelas posições dos planetas no céu e pelas figuras que nele formam.

^{1**} Inclusive, hoje[este texto é de 1961] apenas buscam resultados “práticos” e se fomentam por vezes investigações teóricas — *fundamental research* — é na medida em que esperam aplicações. Por isso os teóricos falam muito frequentemente das suas ideias e seguindo e imitando Bacon, tratam de persuadir as sociedades de que, mais tarde ou mais cedo, a investigação teórica resultará «rendível».

1. Em carta a Julio Rey Pastor, em 1945, publicada por Alberto Pedroso em *Bento de Jesus Caraça – Semeador de Cultura – Inéditos e dispersos*, Campo das Letras, 2007; para a bibliografia caraciana é esta sem dúvida a melhor referência. Bento de Jesus Caraça alude amiúde a “o meu livrinho de divulgação”.
2. Esta polémica teve como palco a revista *Vértice* (1946) e compõe-se dos seguintes textos:
 - a) “Nota a um passo de uma introdução a Berkeley”, por António Sérgio, *Vértice*, Fasc.4, n^o 17 a 21, Novembro de 1945.
 - b) “Resposta a uma crítica”, por Bento de Jesus Caraça, *Vértice*, Fasc.5, n^o 22 a 26, Fevereiro de 1946.
 - c) “Réplica sem severidade a um severo amigo” por António Sérgio, *Vértice*, Fasc.6, n^o 27 a 30, Março de 1946.
 - d) “Carta a António Sérgio-Crítico” por Bento de Jesus Caraça, *Vértice*, Fasc.7, n^o 30 a 35, Maio de 1946.
 - e) “Explicações para os que entendem a língua que eu falo” por António Sérgio, *Vértice*, Fasc.8, n^o 36 a 39, Junho de 1946.
 - f) “Notas, em guisa de conclusão” por Bento de Jesus Caraça, texto destinado à revista *Vértice* embora não tivesse sido enviado para publicação; o texto veio mais tarde a ser incluído na colectânea póstuma, *Bento de Jesus Caraça – Conferências e Outros Escritos*, editada por João Manuel Caraça, em 1970.
3. O carácter pouco abrangente do livro parece plenamente justificado por se situar intencionalmente num plano fundamental — ou seja de fundamentação de algumas ideias matemáticas — excluindo domínios certamente mais fecundos e de maior aplicabilidade, como o cálculo diferencial e o cálculo integral, ambos excluídos aliás das suas volumosas *Lições de Álgebra e Análise* (vol.I, em 1935 e vol.II em 1940), publicadas sem mais ambição, nas palavras do próprio autor, que fazer delas “um instrumento útil de trabalho” para os seus alunos do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras.
4. Henri Lefebvre, em *Le Matérialisme Dialectique*, P.U.F., 1940 diz (p.67): “Ainda que Marx nunca tenha dado seguimento ao seu projecto de exposição da sua metodologia dialéctica — e ainda que nunca tenha empregado as palavras ‘materialismo dialéctico’ para designar a sua doutrina — os elementos do seu pensamento são incontestavelmente os que se exprimem nestes termos.”
5. J. Sebastião e Silva, “Bento Caraça e o ensino da Matemática em Portugal”, entrevista publicada no *Diário de Lisboa*, em 25 de Junho de 1968, e inserida no número especial de Homenagem a Bento de Jesus Caraça, da revista *Vértice*, vol. XXVIII, n^o 412,413,414, Set.Out.Nov. 1978.
6. Manuscrito pertencente ao “Arquivo Bento de Jesus Caraça” preservado ao cuidado da Fundação Mário Soares.
7. Leia-se “Bento de Jesus Caraça economista” por Carlos Bastien, texto introdutório ao livro por si organizado, *Inéditos de Economia Matemática*, por Bento de Jesus Caraça, Gradiva, 2010.
8. Natália Bebiano, “Contributo para o Estudo da Obra Matemática de Bento de Jesus Caraça”, *Análise*, n^o 13, 1989.
9. Veja-se os artigos “Continuidade e Números Irracionais” (1872) e “O que são e para que servem os números?” (1888), por Richard Dedekind, traduções de Augusto J. Franco de Oliveira, disponíveis em <http://sites.google.com/site/tutasplace/>
10. A citação é recolhida de uma comunicação de Augusto Franco de Oliveira intitulada “A paixão de Caraça nos *Conceitos*” — a publicar no Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática — apresentada num colóquio comemorativo de “Os 70 anos dos *Conceitos Fundamentais da Matemática*”, que teve lugar em 25/10/2012 no Instituto para a Investigação Interdisciplinar, organizado por Luís Saraiva.
11. Este livro foi reeditado e revisto com coordenação de Augusto J. Franco de Oliveira, pela Ludus, em 2009.
12. A essa polémica dedicou Amílcar Coelho um interessante livro intitulado *Desafio e Refutação – Controvérsia entre António Sérgio e Jesus Caraça* (Livros Horizonte, 1990) sobre a natureza e valor da Ciência; os textos integrais da polémica figuram no livro em Apêndice.
13. Retomamos neste ponto, no essencial, o texto que nós próprios escrevemos no Prefácio da edição dos *Conceitos Fundamentais da Matemática*, publicada pela Gradiva em 1998.
14. Para aferir da justeza ou falta dela, no situar das ideias de Platão na disputa Sérgio-Caraça é útil o livro de João Príncipe, *Razão e Ciência em António Sérgio*, Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2004; e é indispensável o livro *Estudos Inéditos de Filosofia Antiga* de Vasco de Magalhães-Vilhena, edição crítica de Hernâni Resende, Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.
15. *Luís de Freitas Branco / O Músico-Filósofo*, de João Maria de Freitas Branco, Juventude Musical Portuguesa, 2005.
16. Entrevista feita por A. Campos Matos a Vasco de Magalhães -Vilhena, publicada no *JL-Jornal de Letras, Artes e Ideias*, n^o 377 (Set.Out., 1989) posteriormente inserida no livro *Agostinho da Silva e Vasco de Magalhães-Vilhena entrevistados sobre António Sérgio*, por A. Campos Matos, Livros Horizonte, 2007. O “trabalho” a que se refere Vasco de Magalhães-Vilhena na transcrição feita é um texto referido como segue, no livro ora aqui mencionado: “Por convite da *Revista da História das Ideias*, da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, 2 volumes, (Coordenação de Fernando Catroga e Amadeu José Carvalho Homem), Magalhães-Vilhena aceita publicar em 1983 o texto «Em torno do Idealismo Histórico-Social de António Sérgio», que deveria constituir um capítulo de uma obra mais vasta sobre o autor dos *Ensaios*. A falta de saúde e de ânimo não o deixaram concluir tal obra. Considerou no entanto esse capítulo, cuja publicação se deve ao contributo de António Melo, como «o que de mais significativo publicou sobre Sérgio». A mencionada “obra mais vasta” será publicada ao que parece em 2013, sob os cuidados exigentes de Hernâni Resende.
17. Manuel Dias Duarte, *História da Filosofia em Portugal – Nas suas conexões políticas e sociais*, Livros Horizonte, 1987.
18. A que fontes teria Bento de Jesus Caraça ido beber as “leis do materialismo dialéctico”? Teria tido acesso aos *Principes élémentaires de philosophie*, de Georges Politzer, editados pelas Éditions sociales em 1935-1936 ?
19. Tópicos referidos nas páginas 120, 37 e 111, dos “Conceitos”, na edição da Gradiva, de 1998.
20. Alexandre Koyré, “Perspectivas de la Historia de las Ciencias”, em *Estudios de Historia del Pensamiento Científico*, Siglo Veintiuno Editores, 1978; o texto original foi apresentado em 1961, num Colóquio em Oxford.
21. Este texto figura numa carta dirigida a J.E. Switzer, in D.J. de S. Price, *Science since Babylon*, 1962, New Haven CT, Yale University Press.